

# Phononenassistierte Auger-Prozesse in III–V-Verbindungen

Wolfgang Rosenthal

Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität Berlin

(Z. Naturforsch. **28 a**, 1233–1246 [1973]; eingegangen am 22. Dezember 1972)

*Phononassisted Auger Processes in III–V-Compounds*

Phononassisted Augerprocesses are investigated as a mechanism of band-to-band-transitions in III–V-Compounds. It is found that they can explain the temperature dependence in a temperature region, where the normal Auger processes are ineffective.

## Einleitung

Nachdem Beattie und Landsberg<sup>1</sup> 1958 die Bedeutung der Auger-Prozesse für die strahlungslose Rekombination von Ladungsträgern klärten, erhob sich die Frage nach der Effektivität von phononenbegleiteten Auger-Prozessen für die Lebensdauer. Eine entsprechende Untersuchung wurde 1961 von Eagles<sup>2</sup> durchgeführt. Dort wird die Störungsrechnung zweiter Ordnung zur Berechnung eines Ausdrucks für die Lebensdauer benutzt. Die Ergebnisse von Eagles stimmen mit den in dieser Arbeit gewonnenen aus folgendem Grund nicht überein: Bei der Auswertung der Integrale in<sup>2</sup> wird der auftretende Energienenner als Mittelwert über den Integrationsbereich zu  $(E_G m_L/m_V)^2$  abgeschätzt ( $E_G$  = Bandlücke,  $m_L$ ,  $m_V$  = effektive Massen des Leitungsbandes und des Valenzbandes). Eine genauere Betrachtung zeigt aber, daß das Integral wegen einer Polstelle des Energienenners nicht existiert, so daß zusätzliche Voraussetzungen gemacht werden müssen. In dieser Arbeit wird das divergente Integral durch einen Abschneideparameter endlich gemacht. Die Ergebnisse zeigen, daß die phononenbegleiteten Auger-Prozesse zur Deutung der Übergangswahrscheinlichkeit (insbesondere bei tiefen Temperaturen) herangezogen werden können, wenn der Abschneideparameter in bestimmter Weise von der Ladungsträgerkonzentration in den Bändern abhängt. Es wird als einfacher Fall lineare Abhängigkeit angenommen.

In 1. wird der Hamilton-Operator und die später benutzte unitäre Transformation behandelt. Zur Kennzeichnung der betrachteten Prozesse wird in 2. eine Diagrammtechnik eingeführt. 3. berücksichtigt

Sonderdruckanforderungen an Dr. W. Rosenthal, Institut für Theoretische Physik der Techn. Universität Berlin, D-1000 Berlin 12, Straße des 17. Juni 135.

die Statistik und 4. bringt Ergebnisse und den Vergleich mit Messungen.

## 1. Hamilton-Operator und Transformation

Der verwendete Hamilton-Operator besteht aus 4 Teilen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 \quad (1.1)$$

$\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  sind die Hamilton-Operatoren der freien Bloch-Elektronen bzw. der freien Phononen:

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{n, k} \varepsilon_{k, n} a_{k, n}^* a_{k, n}. \quad (1.2)$$

$\mathbf{k}$  = Impulsvektor aus der 1. Brillouin-Zone;  
Der Einfachheit halber sei auch die Spinquantenzahl in  $\mathbf{k}$  enthalten;

$n$  = Bandindex;

$\varepsilon_{k, n}$  = Energieeigenwert des Bloch-Zustandes mit den Quantenzahlen  $\mathbf{k}$ ,  $n$ .

Für den weiteren Teil der Arbeit werden in  $\mathcal{H}_1$  nur das oberste Valenzband  $n = V$  und das tiefste Leitungsband  $n = L$  berücksichtigt. Es werden parabolische Bänder benutzt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k, L} &= E_L + \mathbf{k}^2 \hbar^2 / 2 m_L, & E_L &= \text{Leitungsbandrand}, \\ \varepsilon_{k, V} &= E_V - \mathbf{k}^2 \hbar^2 / 2 m_V, & E_V &= \text{Valenzbandrand}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}. \quad (1.4)$$

Wir betrachten nur longitudinale akustische Phononen mit der Dispersionsrelation

$$\omega_{\mathbf{q}} = \omega_q = s_0 \cdot |\mathbf{q}|; \quad q = |\mathbf{q}|, \quad (1.5)$$

$s_0$  = Schallgeschwindigkeit.

$\mathcal{H}_3$  ist die Elektron-Phonon-Wechselwirkung

$$\mathcal{H}_3 = \sum_{k, q, n} (i g_q b_{\mathbf{q}}^* a_{k, n}^* a_{k+q, n} + \text{h.c.}). \quad (1.6)$$



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Für den Kopplungsfaktor wurde die übliche einfachste Form benutzt (4. Kapitel in <sup>3)</sup>)

$$|g_{\mathbf{q}}|^2 = |g_{\mathbf{q}}|^2 = |C|^2 (\hbar q / 2 M N s_0 \Omega), \quad g_{\mathbf{q}} \text{ reell.} \quad (1.7)$$

Die Konstante  $C$  hat die Größenordnung einiger eV,  $M$  ist die mittlere Gitterteilchenmasse,  $\Omega$  das Grundgebiet und  $N$  die Zahl der Elementarzellen pro cm<sup>3</sup>.

$\mathcal{H}_4$  stellt die Elektron-Elektron-Wechselwirkung dar:

$$\mathcal{H}_4 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2' \\ n_1 n_2 n_1' n_2'}} G_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'} a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_2'}^* a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_1'} . \quad (1.8)$$

$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1' = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2'$

Die Matrixelemente werden wie bei Beattie und Landsberg<sup>1</sup> durch

$$G_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'} = F_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1} F_{\mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1'} 4 \pi e^2 / \Omega \varepsilon ((\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2 + \lambda^2) \quad (1.9)$$

genähert

$$F_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1} = \int_{\Omega} u_{\mathbf{k}_2, n_2}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}_1, n_1}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \quad (1.10)$$

$u_n^{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  ist der gitterperiodische Anteil der Bloch-Funktion mit den Quantenzahlen  $\mathbf{k}, n$ . Bei der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit treten die Absolutquadrate der  $F_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1}$  auf. Wir werden dann deren Mittelwerte benutzen:

$$|F_1 F_2|^2 = \overline{|F_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1} F_{\mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1'}|^2} . \quad (1.11)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzen wir diese Mittelwerte jetzt schon und setzen statt (9):

$$G_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'} = |F_1 F_2| \cdot 4 \pi e^2 / \Omega \varepsilon ((\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)^2 + \lambda^2) . \quad (1.12)$$

(1.12) ist also unabhängig vom Spin der vier Elektronenzustände.

Nachdem so die Form des Hamilton-Operators klar ist, unterwerfen wir ihn einer unitären Transformation  $U$ . Diese gleicht der von Fröhlich<sup>4a</sup> zur Erklärung der Supraleitung benutzten. Man hat nur den Unterschied, daß jetzt auch  $\mathcal{H}_4$  aus (1.8) mittransformiert wird. Daher stehen im transformierten Hamilton-Operator Terme, die coulombsche Elektron-Elektron-Wechselwirkung unter Beteiligung von Phononen enthalten. Im Gegensatz zu <sup>2</sup> wird dieser Weg gewählt, weil so auch Prozesse mit mehreren Phononen schon in erster Ordnung der Störungsrechnung berücksichtigt werden. Die Transformation  $U$  lautet:

$$U = \exp[iS], \quad (1.13)$$

$$S = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, n_2, n_1} (g_q C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}, n_1} + \text{h.c.}),$$

$$C_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{q}} = 0, \quad \text{wenn } n_1 \neq n_2,$$

$$C_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{q}} = 0, \quad \text{wenn } |\varepsilon_{\mathbf{k}, n} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar \omega_{\mathbf{q}}| \leq d_n,$$

$$C_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{q}} = 1 / (\varepsilon_{\mathbf{k}, n} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar \omega_{\mathbf{q}}), \quad (1.14)$$

wenn  $|\varepsilon_{\mathbf{k}, n} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar \omega_{\mathbf{q}}| > d_n$ .

Diese Transformation unterscheidet sich von der Fröhlichschen<sup>4a, 4b</sup> dadurch, daß zwei Bandindizes auftreten. Im transformierten Hamilton-Operator fehlt dann die Elektron-Phonon-Wechselwirkung in 1. Potenz der Kopplungskonstanten bis auf den Teil, der bis auf die Unschärfe  $d_n$ , die Energie erhält<sup>4b</sup>.

---

Der transformierte Hamilton-Operator  $\tilde{\mathcal{H}}_F$  lautet bis zu Gliedern in erster Ordnung der Kopplungskonstanten, ohne die Elektron-Elektron-Wechselwirkung:

$$\tilde{\mathcal{H}}_F = U \mathcal{H}_F U^{-1} = \sum_{\mathbf{k}, n} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}} + \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, n} \{ i g_q b_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* a_{\mathbf{q}} + \text{h.c.} \} \left| \varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar \omega_{\mathbf{q}} \right| \leq d_n . \quad (1.15)$$

## 2. Kapitel (Klassifizierung der Terme)

### Nullphononenprozesse

$\mathcal{H}_4$  aus (1.8) transformiert man vermittels der Beziehungen

$$\begin{aligned} [S, a_{\mathbf{k}, n}^*] &= \sum_{\mathbf{q}, n_1} (C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} g_q a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}^* + C_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{q}}^* g_q a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}), \\ [S, a_{n, \mathbf{k}}] &= - \sum_{\mathbf{q}, n_1} (C_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{q}} g_q a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^* + C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} g_q a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}), \\ [S, b_{\mathbf{q}}^*] &= \sum_{\mathbf{k}, n_2, n_1} C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} g_q a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \quad [S, b_{\mathbf{q}}] = - \sum_{\mathbf{k}, n_2, n_1} C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} g_q a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* a_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
U \mathcal{H}_4 U^{-1} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2' \\ n_1 n_2 n_1' n_2'}} G_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'} (a_{\mathbf{k}_2, n_2}^* + i/1! [S, a_{\mathbf{k}_2, n_2}^*] + i^2/2! [S, [S, a_{\mathbf{k}_2, n_2}]] + \dots) \\
& \times (a_{\mathbf{k}_2', n_2'}^* + i/1! [S, a_{\mathbf{k}_2', n_2'}^*] + i^2/2! [S, [S, a_{\mathbf{k}_2', n_2'}]] + \dots) \\
& \times (a_{\mathbf{k}_1', n_1'}^* + i/1! [S, a_{\mathbf{k}_1', n_1'}^*] + i^2/2! [S, [S, a_{\mathbf{k}_1', n_1'}]] + \dots) \\
& \times (a_{\mathbf{k}_1, n_1}^* + i/1! [S, a_{\mathbf{k}_1, n_1}^*] + i^2/2! [S, [S, a_{\mathbf{k}_1, n_1}]] + \dots).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

In nullter Ordnung der Kopplungskonstanten ergibt sich die ursprüngliche Elektron-Elektron-Wechselwirkung aus (1.8)

$$\tilde{\mathcal{H}}_4^{(0)} = \mathcal{H}_4.$$

Wir wollen jeden Summanden von  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(0)}$  durch ein Diagramm (Abb. 1) darstellen.

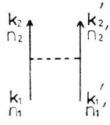


Abb. 1. Darstellung eines Summanden von  $H_4^{(0)}$ .

Sind die beiden Vernichter oder Erzeuger in Abb. 1 vertauscht, so werden die entsprechenden Linien gekreuzt (z. B. Abbildung 2).

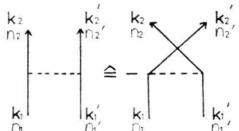


Abb. 2. Kreuzung von Fermionenlinien.

Diagramme, die durch Drehung der Wechselwirkungslinie um  $180^\circ$  auseinander hervorgehen, geben wegen Abb. 2 den gleichen Operator. Sie werden später nur einmal berücksichtigt und dafür wird der Faktor  $\frac{1}{2}$  vor  $G_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'}$  weggelassen (Abbildung 3).

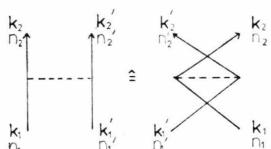


Abb. 3. Äquivalente Diagramme.

### Einphononenprozesse

Nach Ausmultiplikation von (2.2) erhält man Einphononenprozesse, wenn man nur die Terme in erster Ordnung der Kopplungskonstanten betrach-

tet: z. B.:

$$\frac{1}{2} G_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2' \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'} (i/1! \cdot [S, a_{\mathbf{k}_2, n_2}^*]) a_{\mathbf{k}_2', n_2'}^* a_{\mathbf{k}_1', n_1'} a_{\mathbf{k}_1, n_1} \tag{2.3}$$

mit

$$[S, a_{\mathbf{k}_2, n_2}^*] = \sum_{\mathbf{q}} C_{\mathbf{k}_2, \mathbf{q}} g_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, n_2}^* b_{\mathbf{q}} + C_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{q}} g_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, n_2}^* b_{\mathbf{q}}.$$

Der einzelne Summand in (2.3) bedeutet, daß  $a_{\mathbf{k}_2, n_2}^*$  unter Aussendung (Einfang) eines Phonons der Wellenzahl  $\mathbf{q}$  in  $a_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, n_2}^*$  ( $a_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, n_2}^*$ ) übergegangen ist. Jeder solcher Terme kann wieder durch ein Diagramm klassifiziert werden (Abb. 4a, 4b).

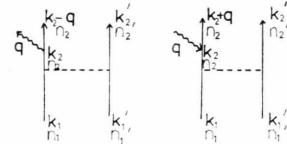


Abb. 4 a, b. Emission und Absorption von Phononen.

In gleicher Weise ordnet man die Diagramme aus Abb. 5 den weiteren Termen aus (2.2) zu.

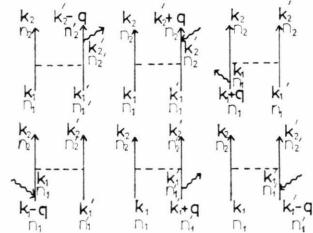


Abb. 5. Diagramme der Terme aus 2.2.

Die Summe dieser Einphononenprozesse bezeichnen wir mit  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(1)}$ .

### Mehrphononenprozesse

Jeder Summand in zweiter Ordnung der Kopplungskonstanten aus (2.2) entsteht aus einem Term von  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(1)}$  in gleicher Weise wie die Terme von  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(1)}$  aus  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(0)}$ , nämlich durch Kommutieren der einzelnen Vernichter und Erzeuger mit  $S$  und Multiplika-

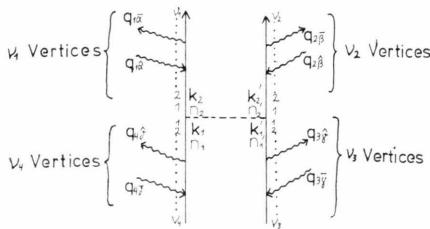


Abb. 6. Allgemeines Diagramm mit zwei ein- und auslaufenden Fermionenlinien.

tion mit bestimmten komplexen Zahlen. Das macht es möglich, auch die Diagramme von  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(1)}$  durch Anhängen von aus- bzw. einlaufenden Phononen an den Operator, der mit  $S$  kommutiert wird, in Diagramme zu verwandeln, die man den Termen von  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(2)}$  zuordnen kann. Ganz entsprechend kann man alle höheren phononenbegleiteten Terme von  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  behandeln. Allgemein wird einem Diagramm wie es Abb. 6 zeigt, der Operator (2.4) zugeordnet:

$$\frac{1}{2} G_{\substack{k_2 k_2' k_1 k_1' \\ n_2 n_2' n_1 n_1'}} \frac{(i)^{v_1}}{v_1!} \frac{(i)^{v_2}}{v_2!} \frac{(-i)^{v_3}}{v_3!} \frac{(-i)^{v_4}}{v_4!} (\dots g_{q_{1z}} C_{\bar{k}_2, q_{1z}} \dots g_{q_{1z}} C_{\bar{k}_2, -q_{1z}} \dots) \\ (\dots g_{q_{2\beta}} C_{\bar{k}_2', q_{2\beta}} \dots g_{q_{2\beta}} C_{\bar{k}_2', -q_{2\beta}}) (\dots g_{q_{3\gamma}} C_{\bar{k}_1', q_{3\gamma}} \dots g_{q_{3\gamma}} C_{\bar{k}_1', -q_{3\gamma}}) \\ (\dots g_{q_{4\delta}} C_{\bar{k}_1, q_{4\delta}} \dots g_{q_{4\delta}} C_{\bar{k}_1, -q_{4\delta}}) (\dots b_{q_{1z}}^* \dots b_{q_{1z}} \dots) (\dots b_{q_{2\beta}}^* \dots b_{q_{2\beta}} \dots) \\ (\dots b_{q_{3\gamma}}^* \dots b_{q_{3\gamma}} \dots) (\dots b_{q_{4\delta}}^* \dots b_{q_{4\delta}} \dots) a_{k_{2f}, n_2}^* a_{k_{2f}, n_2'} a_{k_{1f}, n_1} a_{k_{1f}, n_1'}.$$

Dabei gilt:

$$\bar{k}_2 = \left( \sum_{z=1}^{\bar{z}-1} \mathbf{q}_{1z} \operatorname{sgn} q_{1z} + \mathbf{k}_2 \right), \quad \bar{k}_2 = \left( \sum_{z=1}^{\bar{z}} \mathbf{q}_{1z} \operatorname{sgn} q_{1z} + \mathbf{k}_2 \right), \\ \mathbf{k}_{2f} = \left( \sum_{z=1}^{v_1} \mathbf{q}_{1z} \operatorname{sgn} q_{1z} + \mathbf{k}_2 \right), \quad \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{1z} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mathbf{q}_{1z} \text{ einlaufend,} \\ -1 & \text{wenn } \mathbf{q}_{1z} \text{ auslaufend.} \end{cases}$$

Analog ist  $\bar{k}_2'$ ,  $\hat{k}_2'$ ,  $\mathbf{k}_{2f}'$  definiert.

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 - \sum_{\delta=1}^{\bar{\delta}-1} \mathbf{q}_{4\delta} \operatorname{sgn} q_{4\delta}, \quad \hat{\mathbf{k}}_1 = \mathbf{k}_1 - \sum_{\delta=1}^{\bar{\delta}} \mathbf{q}_{4\delta} \operatorname{sgn} q_{4\delta}, \\ \mathbf{k}_{1f} = \mathbf{k}_1 - \sum_{\delta=1}^{v_4} \mathbf{q}_{4\delta} \operatorname{sgn} q_{4\delta}, \quad \operatorname{sgn} \mathbf{q}_{4z} = \begin{cases} +1 & \text{wenn } \mathbf{q}_{4z} \text{ einlaufend,} \\ -1 & \text{wenn } \mathbf{q}_{4z} \text{ auslaufend.} \end{cases}$$

Analog ist  $\bar{k}_1'$ ,  $\hat{k}_1'$ ,  $\mathbf{k}_{1f}'$  definiert.

(2.4)

Das zugehörige Bildungsgesetz ist:

1. Die eigentliche Elektron-Elektron-Wechselwirkung in Abb. 1 ergibt einen Faktor  $\frac{1}{2} G_{\substack{k_2 k_2' k_1 k_1' \\ n_2 n_2' n_1 n_1'}}$  (siehe aber Regel 11).

2. Jede auslaufende Phononenlinie ergibt einen Faktor  $g_q C_{\substack{k, q \\ n, n'}}$ .

3. Jede einlaufende Phononenlinie ergibt einen Faktor  $g_q C_{\substack{k+q, q \\ n, n'}}$ .

4.  $v_1$  aus- oder einlaufende Phononen an der auf der linken Seite der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auslaufenden Elektronenlinie ergeben einen zusätzlichen Faktor  $(i^{v_1})/v_1!$ .

5.  $v_2$  aus- oder einlaufende Phononen an der auf der rechten Seite der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auslaufenden Elektronenlinie ergeben einen zusätzlichen Faktor  $(i^{v_2})/v_2!$ .



6.  $v_3(v_4)$  aus- oder einlaufende Phononen an der auf der rechten (linken) Seite der Elektron-Elektron-Wechselwirkung einlaufenden Elektronenlinie ergeben einen zusätzlichen Faktor  $(-i)^{v_3}/v_3!$ ,  $((-i)^{v_4}/v_4!)$ .

7. Die Gruppen von Phononenoperatoren, die links oben, rechts oben, rechts unten und links unten von der Elektron-Elektron-Wechselwirkung stehen, werden in dieser Reihenfolge hingeschrieben. In den Gruppen gilt die Reihenfolge, in der die Operatoren von oben nach unten an der Elektronenlinie stehen.

8. Die Elektronenerzeuger und -vernichter stehen in der konventionellen Reihenfolge, die durch: links oben, rechts oben, rechts unten, links unten gegeben ist.

9. Für jede Wechselwirkung gilt die Impulserhaltung, auch für die Elektron-Elektron-Wechselwirkung.

kung (natürlich immer bis auf einen Vektor des reziproken Gitters).

10. Je zwei sich kreuzende Fermionenlinien ergeben den Faktor  $(-1)$ .

11. Diagramme, die ineinander übergehen, wenn man die Coulomb-Wechselwirkung entsprechend Abb. 3 um  $180^\circ$  dreht, im Zusatz zu Regel 1. liefern den gleichen Beitrag. Wir berücksichtigen das im weiteren dadurch, daß wir nur einen der beiden Terme hinschreiben und dafür in Regel 1. den Faktor  $\frac{1}{2}$  weglassen.

Es werden nur Prozesse behandelt, bei denen jeweils zwei Elektronen einlaufen bzw. auslaufen. Außerdem bleiben Diagramme, bei denen emittierte Phononen wieder absorbiert werden, z.B. Abb. 7,

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} + 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}} \rangle;$$

gekennzeichnet. Die weiteren Matrixelemente von  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  haben die Form:

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} - 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} + 1; N_{\tilde{\mathbf{q}}} + 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}}; N_{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} + 2 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}} \rangle;$$

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} - 1; N_{\tilde{\mathbf{q}}} - 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}}, N_{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} - 2 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}} \rangle;$$

$$\langle \mathbf{k}_2, \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} + 1; N_{\tilde{\mathbf{q}}} - 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}}; N_{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle$$

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}'_2; N_{\mathbf{q}} - 1; N_{\tilde{\mathbf{q}}} + 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}'_1; N_{\mathbf{q}}; N_{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle$$

Wir wollen als erstes die Einphononenmatrixelemente von (2.5) berechnen.

Hierzu liefern alle Summanden von  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  einen von Null verschiedenen Beitrag, in denen der Phononenenerzeugungsoperator  $b^*_{-\mathbf{q}}$ , die beiden Elektronenvernichtungsoperatoren  $a_{\mathbf{k}_1, n_1} a_{\mathbf{k}'_1, n'_1}$  und die beiden Elektronenerzeugungsoperatoren  $a^*_{\mathbf{k}_2, n_2} a^*_{\mathbf{k}'_2, n'_2}$  auftreten (Abb. 8). Es ist dabei zu berücksichtigen, daß der Spin entlang einer Fermionenlinie erhalten bleibt. So liefern alle Graphen von Abb. 8 nur dann nicht verschwindende Beiträge, wenn die Spinquantenzahlen aller beteiligten Elektronen gleich sind. Wenn die in  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  enthaltenen Spinquantenzahlen ebenso wie die in  $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2$  enthaltenen gleich, die von

unberücksichtigt. Diese Diagramme bewirken die Renomierung der Energie bzw. eine Korrektur zu der Coulombschen Elektron-Elektron-Wechselwirkung.

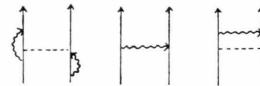


Abb. 7. Diagramme, die zur Renormierung beitragen.

Wir betrachten nun die Matrixelemente von  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(1)}$  und  $\tilde{\mathcal{H}}_4^{(2)}$ : Ein Matrixelement, bei dem sich die beiden Elektronenerzeugungsoperatoren  $a^*_{\mathbf{k}_1, n_1} a^*_{\mathbf{k}'_1, n'_1}$  des Anfangszustandes in die Operatoren  $a^*_{\mathbf{k}_2, n_2} a^*_{\mathbf{k}'_2, n'_2}$  des Endzustandes verwandeln und bei dem zu den  $N_{\mathbf{q}}$  Phononen des Ausbreitungsvektors  $\mathbf{q}$  ein Phonon hinzukommt, wird durch

$$\text{Einphononenerzeugung} \quad (2.5)$$

$$\text{Einphononenvernichtung}, \quad (2.6)$$

$$\text{Zweiphononenerzeugung}, \quad (2.7)$$

$$\text{Zweiphononenvernichtung}, \quad (2.8)$$

$$\text{gleichzeitige Erzeugung}$$

$$\text{und Vernichtung von Phononen}. \quad (2.9)$$

$\mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2$  aber ungleich sind, so sind nur die Matrixelemente von 8a, b, c, d von Null verschieden. Umgekehrt liefern nur 8e, f, g, h einen nicht verschwindenden Beitrag, wenn die Spins von  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2'$  sowie

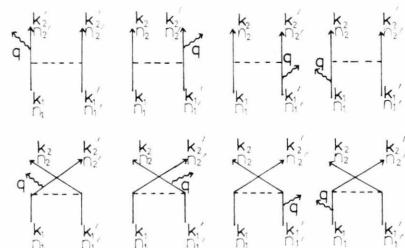


Abb. 8. Diagramme der Einphononenprozesse.

von  $\mathbf{k}_1'$ ,  $\mathbf{k}_2$  gleich und die von  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_1'$  verschieden sind. Diese Regel gilt, ohne daß es besonders erwähnt wird, sinngemäß auch für die weiteren in diesem Kapitel behandelten Matrixelemente und die zu gehörigen Diagramme.

Jeder Graph aus Abb. 8 liefert als Beitrag zum Matrixelement den Koeffizienten des durch das Diagramm nach Regel 1 bis 11 bezeichneten Operators, multipliziert mit  $\sqrt{N_q + 1}$ . Dieser Faktor entsteht durch Anwendung von  $b^*_q$  auf den Ausgangszustand mit  $N_q$  Phononen des Ausbreitungsvektors  $\mathbf{q}$ . Man kann das Matrixelement 2.5 daher durch Abb. 9 darstellen.

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2'; N_q + 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'; N_q \rangle_{n_2 n_2'} \\ &= \sqrt{N_q + 1} \{ i G_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{k}_2', \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{q}} + i G_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{q}} \\ &\quad - i G_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1' - \mathbf{q}} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} - i G_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \\ &\quad - i G_{\mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{q}} - i G_{\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{q}} \\ &\quad + i G_{\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1' - \mathbf{q}} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} + i G_{\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Es ist nun einfach, auch die Matrixelemente für die Absorption eines Phonons in Diagrammen darzustellen. Man erhält das Matrixelement

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'; N_q | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2'; N_q + 1 \rangle, \quad (2.11)$$

jedoch schneller aus der Überlegung, daß  $\tilde{\mathcal{H}}_4$  ein hermitescher Operator und damit (2.11) das konjugiert komplexe zu (2.5) ist. Das Matrixelement

$$\langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2'; N_q + 1; N_{q'} + 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'; N_q; N_{q'} \rangle_{n_2 n_2'}$$

mit  $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$  wird durch Abb. 10 gegeben. Dabei sind die Phononen nicht bezeichnet. Es sind nämlich beide Möglichkeiten, die Phononenpfeile mit  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{q}'$  zu indizieren, zugelassen, und Abb. 10 ist zu verstehen als Summe über diese beiden Möglichkeiten. In Abb. 10 sind die Prozesse mit  $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$  ausgeschlossen. Sie werden durch dieselben Diagramme dargestellt. An die Stelle des Faktors  $\sqrt{(N_q + 1)(N + 1)}$  tritt jedoch der Faktor  $\sqrt{(N_q + 2)(N_q + 1)}$  beim Matrixelement

$$\langle \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2'; N_q + 2 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'; N_q \rangle. \quad (2.12)$$

Außerdem fällt die Summe über die beiden Möglichkeiten,  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{q}'$  zu verteilen, weg.

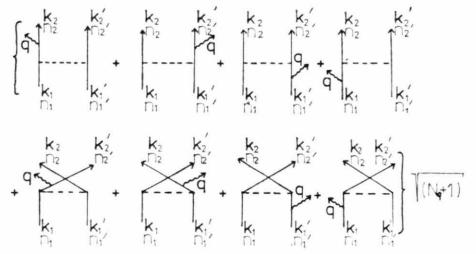


Abb. 9. Darstellung der Einphononenmatrixelemente.

Nach den Regeln 1 bis 11 ausgewertet, ist das Matrixelement

$$\sum_{(N+1)}$$

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_2'; N_q + 1; N_{q'} + 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'; N_q; N_{q'} \rangle_{n_2 n_2'} \\ &= \sqrt{(N_q + 2)(N_q + 1)} \{ i G_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{k}_2', \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{q}} + i G_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{q}} \\ &\quad - i G_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1' - \mathbf{q}} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} - i G_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \\ &\quad - i G_{\mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2' + \mathbf{q}, \mathbf{q}} - i G_{\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{q}} \\ &\quad + i G_{\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1' - \mathbf{q}} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} + i G_{\mathbf{k}_2', \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{q}, \mathbf{k}_1'} g_q C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

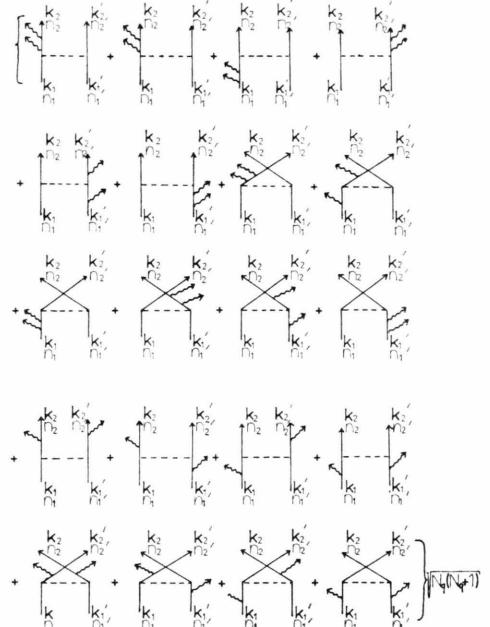


Abb. 10. Darstellung der Matrixelemente für Zweiphonenemission.

Die Matrixelemente für die Vernichtung zweier Phononen erhält man aus (2.12) durch Bildung des konjugiert komplexen.

Nun bleiben noch die Matrixelemente, bei denen ein Phonon absorbiert, ein anderes emittiert wird. Diese sind von der Form

$$\langle \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2'; N_{\mathbf{q}} + 1; N_{\tilde{\mathbf{q}}} - 1 | \tilde{\mathcal{H}}_4 | \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1'; N_{\mathbf{q}}; N_{\tilde{\mathbf{q}}} \rangle_{n_2 n_2'} \quad (2.13)$$

und die Beiträge sind in Abb. 11 dargestellt.

### 3. Lebensdauer

Wir beschreiben durch  $n_0$  und  $p_0$  die Gleichgewichtskonzentration von Elektronen und Löchern. Die Abnahme eines Überschusses von  $\nu_n = n - n_0$  Elektronen im Leitungsband und  $\nu_p = p - p_0$  Löchern im Valenzband wird nun durch

$$(\partial n / \partial t) = (\partial \nu_n / \partial t) = (\partial \nu_n / \partial t)_0 + (\partial \nu_n / \partial t)_1 + (\partial \nu_n / \partial t)_2 \\ = (\partial \nu_p / \partial t) = (\partial \nu_p / \partial t)_0 + (\partial \nu_p / \partial t)_1 + (\partial \nu_p / \partial t)_2 \quad (3.1)$$

dargestellt. Offenbar ist für die von uns betrachteten Prozesse  $(\partial n / \partial t) = (\partial p / \partial t)$ . Die Indizes 0, 1, 2 bezeichnen die Anzahl der beteiligten Phononen. So

sind  $(\partial n / \partial t)_0$  bzw.  $(\partial p / \partial t)_0$  die normalen von Beattie und Landsberg<sup>1</sup> berechneten Auger-Prozesse.

$(\partial n / \partial t)_1$  und  $(\partial p / \partial t)_1$  werden nochmals unterteilt nach Prozessen  $(\partial n / \partial t)_{11}$ ,  $(\partial p / \partial t)_{11}$  der Abb. 12a, b (e-e-h-Prozesse) und Prozessen  $(\partial n / \partial t)_{12}$ ,  $(\partial p / \partial t)_{12}$  der Abb. 13e, d (e-h-h-Prozesse)

$$\begin{aligned} (\partial n / \partial t)_1 &= (\partial n / \partial t)_{11} + (\partial n / \partial t)_{12}, \\ (\partial p / \partial t)_1 &= (\partial p / \partial t)_{11} + (\partial p / \partial t)_{12}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für die verschiedenen Prozesse  $(\partial n / \partial t)_{1i}$ ,  $(\partial p / \partial t)_{1,i}$ ,  $(\partial n / \partial t)_2$ ,  $(\partial p / \partial t)_2$  ( $i = 1, 2$ ) hat man nun in der selben Weise wie für Nullphononenprozesse<sup>1, 3, 5</sup> Bilanzgleichungen aufzustellen, die Generation und Rekombination von Ladungsträgern berücksichtigen. Vernachlässigt man dabei in der  $\delta$ -Funktion der Übergangswahrscheinlichkeit die Energie der beteiligten Phononen, so gelingt es, Phononenabsorption durch Anfügen des Faktors  $f(q)$  (3.6), (3.7) an die Terme der Phononenemission zu berücksichtigen, so daß im weiteren nur Diagramme mit auslaufenden Phononenlinien auftauchen.

Man erhält für die zeitliche Änderung der Elektronen im Leitungsband:

$$-\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{11} = \frac{2\pi}{\hbar\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \left| g_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1', \mathbf{q}} \right|^2 \exp \left[ -\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \zeta_0}{\varkappa T} - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \zeta_0}{\varkappa T} - \frac{\zeta_0 - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}}{\varkappa T} \right] \\ \times \frac{n}{n_0} \left( \frac{n}{n_0} \frac{p}{p_0} - 1 \right) \left\{ \left( 1 - \exp \left( -\frac{\hbar\omega_q}{\varkappa T} \right) \right)^{-1} + \left( \exp \frac{\hbar\omega_q}{\varkappa T} - 1 \right)^{-1} \right\} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}), \quad (3.3)$$

$$-\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{12} = \frac{2\pi}{\hbar\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} \left| g_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1', \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}} \right|^2 \exp \left[ \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \zeta_0}{\varkappa T} \right] \\ \times \frac{p}{p_0} \left( \frac{n}{n_0} \frac{p}{p_0} - 1 \right) f(q) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}), \quad (3.4)$$

$$-\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_2 = \frac{2\pi}{\hbar\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{q}} \left| g_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1', \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}} \right|^2 \exp \left[ \frac{-\varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2'} + \zeta_0}{\varkappa T} \right] \\ \times \frac{n}{n_0} \left( \frac{n}{n_0} \frac{p}{p_0} - 1 \right) f(q) f(\tilde{q}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}) \\ + \frac{2\pi}{\hbar\Omega} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1', \mathbf{k}_2', \mathbf{q}} \left| g_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2', \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1', \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{q}}} \right|^2 \exp \left[ \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \zeta_0}{\varkappa T} \right] \\ \times \frac{p}{p_0} \left( \frac{n}{n_0} \frac{p}{p_0} - 1 \right) f(q) f(\tilde{q}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}). \quad (3.5)$$

$\zeta_0$  ist das zum thermischen Gleichgewicht gehörige Fermi-Niveau. Für den aus der Phononenstatistik stammenden Faktor  $f(q)$  werden im weiteren die beiden Grenzfälle

$$\varkappa T \ll \hbar\omega_q \quad \text{d.h.} \quad f(q) = \{(1 - \exp(-\hbar\omega_q/\varkappa T))^{-1} + (\exp(\hbar\omega_q/\varkappa T) - 1)^{-1}\} \approx 1 \quad (3.6)$$

und

$$\varkappa T \gg \hbar\omega_q \quad \text{d.h.} \quad f(q) = \{(1 - \exp(-\hbar\omega_q/\varkappa T))^{-1} + (\exp(\hbar\omega_q/\varkappa T) - 1)^{-1}\} \approx (2\varkappa T/\hbar\omega_q) \quad (3.7)$$

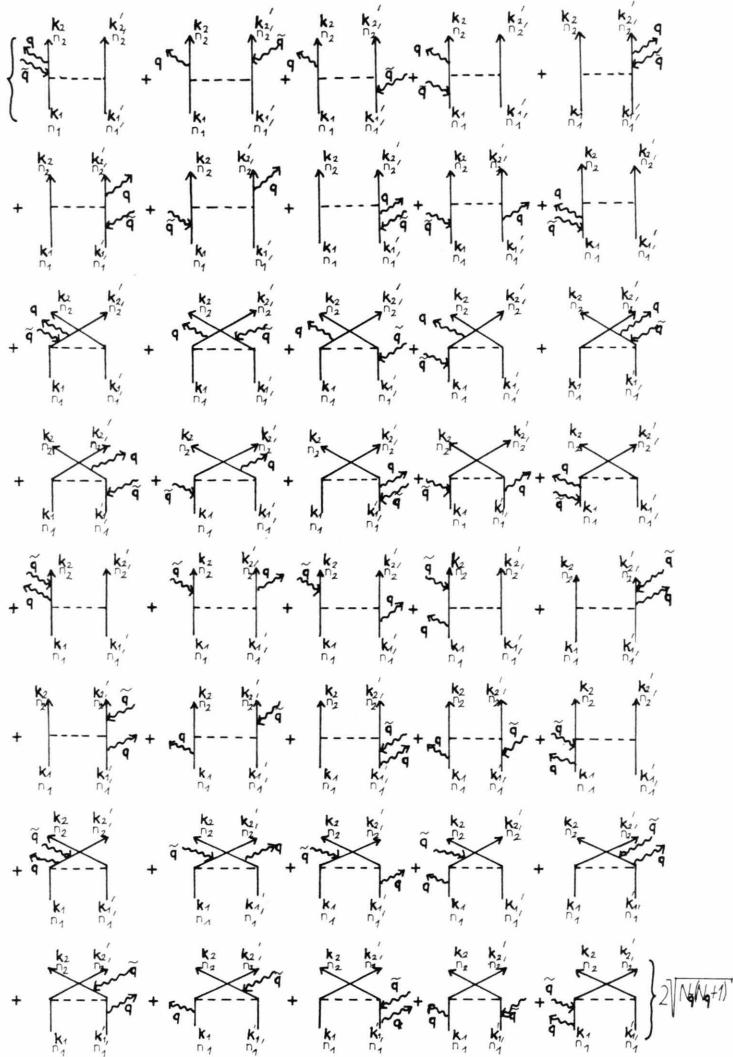


Abb. 11. Emission und Absorption je eines Phonons mit ungleichen Impulsen.

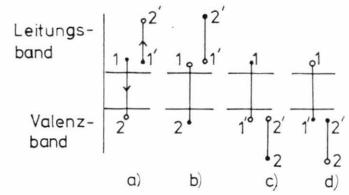


Abb. 12. a, b: e-e-h-Prozesse (Elektron-Elektron-Loch); c, d: e-h-h-Prozesse (Elektron-Loch-Loch).

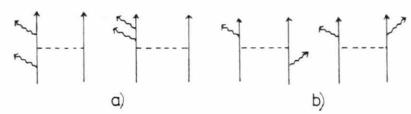
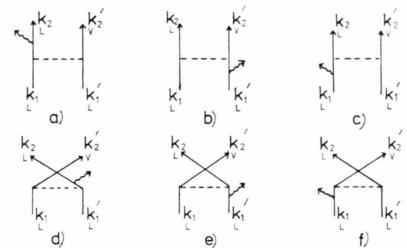


Abb. 13 a. Beispiel für 2 Phononen, die an dieselbe Fermionenlinie koppeln.

Abb. 13 b. Beispiel für 2 Phononen, die an verschiedene Fermionenlinien koppeln.

Abb. 14. a, b, c, d, e, f geben der Reihe nach die Beiträge  $G_1^{(1,1)}$ ,  $G_2^{(1,1)}$ ,  $G_3^{(1,1)}$ ,  $G_4^{(1,1)}$ ,  $G_5^{(1,1)}$ ,  $G_6^{(1,1)}$  aus (3.18).

betrachtet. In (3.3), (3.4), (3.5) sind die Spinquantenzahlen nicht mehr in den Summationen enthalten. Vielmehr ist die Summe über die Spins durch die Definition (3.8) der  $g_{k_2, k'_2, k_1, k'_1, q}$  usw. berücksichtigt:

$$|g_{k_2 k'_2, k_1 k'_1, q}|^2 = 2\{|A + B|^2 + |A|^2 + |B|^2\}, \quad (3.8)$$

A Summe der Diagramme 8a, b, c, d,

B Summe der Diagramme 8e, f, g, h.

$$|g_{k_2 k'_2, k_1, k'_1, q, \tilde{q}}|^2 = 2\{|C + D|^2 + |C|^2 + |D|^2\}, \quad (3.9)$$

C Summe der Diagramme aus Abb. 11.1–11.10 und 11.21–11.30,

D Summe der Diagramme aus Abb. 11.11–11.20 und 11.31–11.40.

Für die Auswertung von (3.8) und (3.9) wird später die Beziehung

$$|g|^2 = 2\{|A|^2 + |B|^2 + |A + B|^2\} = 2\alpha_1(|A|^2 + |B|^2), \quad 1 \leq \alpha_1 \leq 3, \quad (3.10)$$

benutzt. Für kleine Abweichungen aus dem Gleichgewicht gehen die reinen Auger-Prozesse und (3.3), (3.4), (3.5) in die Form

$$\left( \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_0 = - \frac{v_n}{\tau_{n(0)}} - \frac{v_p}{\tau_{p(0)}} ; \quad \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{11} = - \frac{v_n}{\tau_{n(1,1)}} - \frac{v_n}{\tau_{p(1,1)}} ; \quad \left( \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{1,2} = - \frac{v_n}{\tau_{n(1,2)}} - \frac{v_p}{\tau_{p(1,2)}} \quad (3.11)$$

über. Dabei ist

$$\frac{1}{\tau_{n(1,1)}} = \frac{2\pi}{\hbar\Omega n_0} \sum_{k_1, k_1', k_2, k_2'} |g_{k_2 k_2' k_1 k_1', q}|^2 \exp \left[ \frac{-\epsilon_{k_1} - \epsilon_{k_1'} + \epsilon_{k_2'} + \zeta_0}{\varkappa T} \right] f(q) \delta(\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k_1'} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_2'}) , \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\tau_{n(1,2)}} = \frac{2\pi}{\hbar\Omega n_0} \sum_{k_1 k_1' k_2 k_2'} |g_{k_2 k_2' k_1 k_1', q}|^2 \exp \left[ \frac{\epsilon_{k_2} + \epsilon_{k_2'} - \epsilon_{k_1} - \zeta_0}{\varkappa T} \right] f(q) \delta(\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k_1'} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_2'}) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{n(2)}} &= \frac{2\pi}{\hbar\Omega n_0} \sum_{k_1 k_2 k_1' k_2'} |g_{k_2, k_2', k_1, k_1', q, \tilde{q}}|^2 \exp \left[ \frac{-\epsilon_{k_1} - \epsilon_{k_1'} + \epsilon_{k_2'} + \zeta_0}{\varkappa T} \right] f(q) f(\tilde{q}) \delta(\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k_1'} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_2'}) \\ &+ \frac{2\pi}{\hbar\Omega p_0} \sum_q |g_{k_2, k_2', k_1, k_1', q, \tilde{q}}|^2 \exp \left[ \frac{\epsilon_{k_2} + \epsilon_{k_2'} - \epsilon_{k_1} - \zeta_0}{\varkappa T} \right] f(q) f(\tilde{q}) \delta(\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k_1'} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_2'}) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Berechnungen für  $\tau^{(1,1)}$ ,  $\tau^{(1,2)}$ ,  $\tau^{(2)}$  sind in <sup>13</sup> durchgeführt. Sie beruhen wesentlich auf Annahmen über den Parameter  $d_n$  ( $n = L, V$ ) aus (1.14):

1.  $d_n$  soll so klein sein, daß der für das Integral wesentliche Teil des Integranden in der Nähe der für  $d_n \rightarrow 0$  vorhandenen Polstellen liegt.
2. Es soll  $d_L \ll d_V$  gelten.
3. Für kleine Leitungsbandelektronendichten  $n_0$  (Boltzmann-Grenzfall) soll  $d_L$  proportional zu  $n_0$  sein:

$$d_L = P n_0 . \quad (3.15)$$

Wegen 1. kann man die beim Ausquadrieren von  $|g_{k_2, k_2', k_1, k_1', q}|^2$  bzw.  $|g_{k_2, k_2', k_1, k_1', q, \tilde{q}}|^2$  entstehenden Produkte von verschiedenen Diagrammen vernachlässigen. Sie enthalten für die einzelnen Integrationsvariablen nur Pole erster Ordnung gegenüber Polen zweiter Ordnung in den quadratischen Gliedern. Bei Einführung von geeigneten Integrationsvariablen gilt folgendes für die Quadrate von Diagrammen mit zwei Phononen:

*Fall 1:*

Die beiden Phononen koppeln an dieselbe Fermionenlinie (z.B. Abbildung 13a). Dann ergeben sich die beiden Pole zweiter Ordnung beim Durchlaufen einer Integrationsvariablen  $x$ . Dieses Integral über  $x$  kann man also auf das Integrationsgebiet in der Nähe der beiden Pole  $x_1, x_2$  einengen und erhält

$$\begin{aligned} A \left\{ \int_{a_1}^{x_1-d_n} \frac{1}{(x-x_1)^2} dx + \int_{x_1+d_n}^{a_2} \frac{1}{(x-x_1)^2} dx \right\} + B \left\{ \int_{b_1}^{x_2-d_n} \frac{1}{(x-x_2)^2} dx + \int_{x_2+d_n}^{b_2} \frac{1}{(x-x_2)^2} dx \right\} \\ \approx (A+B) \frac{2}{d_n} \quad \text{für} \quad |d_n| \ll |x_1 - a_j|, \quad |d_n| \ll |x_2 - b_j|, \quad j = 1, 2 . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diese (zwölfachen) Integrale liefern zu  $1/\tau^{(2)}$  daher Beiträge proportional zu  $1/d$ .

*Fall 2:*

Die beiden Phononen koppeln an verschiedenen Fermionenlinien an (z.B. Abbildung 13b). Jetzt ergibt sich je ein Pol zweiter Ordnung bei zwei verschiedenen Integrationsvariablen, so daß das gesamte zwölf-

fache Integral einen Beitrag proportional zu  $1/d^2$  liefert. Diagramme mit zwei Phononen vom Fall 1 werden daher gegen die vom Fall 2 vernachlässigt.

Wegen der zweiten Annahme über  $d_n$  kann man alle Prozesse, bei denen Phononen an Zustände des Valenzbandes koppeln, vernachlässigen, da sie Beiträge liefern, die proportional zu  $1/d_V$  bzw.  $1/d_V^2$  und daher klein sind gegenüber Beiträgen proportional zu  $1/d_L$  bzw.  $1/d_L^2$ . Von nun an wird daher für  $d_L$  stets  $d$  geschrieben, da Ausdrücke in  $d_V$  nicht mehr auftauchen.

Daher reduziert sich die Berechnung von  $\tau_n^{(1,1)}$  auf

$$1/\tau_n^{(1,1)} = (1/\Omega n_0) \{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6\}, \quad (3.17)$$

$$I_j = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} 2\alpha_1 |G_j^{(1,1)}|^2 \exp \left[ \frac{-\varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}}{\varkappa T} \right] f(q) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}), \\ j = (1, \dots, 6), \quad (3.18)$$

wobei die  $G_j^{(1,1)}$  durch Abb. 14 gegeben sind. Der Faktor  $2\alpha_1$  resultiert aus (3.10).

Ebenso gilt:

$$1/\tau_n^{(1,2)} = (1/\Omega n_0) \{\hat{I}_1 + \hat{I}_2\}, \\ \hat{I}_j = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} 2\beta_1 |G_j^{(1,2)}|^2 \exp \left[ \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1'}}{\varkappa T} \right] f(q) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}) \\ 1 \leq \beta_1 \leq 3, \quad j = 1, 2, \quad (3.19)$$

und

$$1/\tau_n^{(2)} = (1/\Omega n_0) \{J_1 + J_2 + J_3 + J_4\}, \quad (3.20)$$

$$J_j = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1' \mathbf{k}_2'} q 2\alpha_2 |G_j^{(2)}|^2 \exp \left[ \frac{-\varepsilon_{\mathbf{k}_1} - \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2} + \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}}{\varkappa T} \right] f(q) f(\tilde{q}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}_1} + \varepsilon_{\mathbf{k}_1'} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2} - \varepsilon_{\mathbf{k}_2'}), \\ 1 \leq \alpha_2 \leq 3. \quad (3.21)$$

Die Beiträge  $G_j^{(1,2)}$  und  $G_j^{(2)}$  sind in Abb. 15 gegeben.

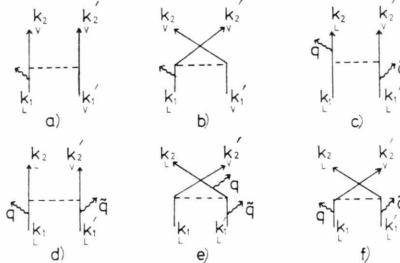


Abb. 15. a, b gibt den Beitrag  $G_1^{(1,2)}, G_2^{(1,2)}$ , in (3.19), c, d, e, f gibt den Beitrag  $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, G_3^{(2)}, G_4^{(2)}$  aus (3.21).

Für den Fall hoher Temperaturen (3.7) ergibt die Berechnung von (3.17), (3.19), (3.20)<sup>13</sup>:

$$\frac{1}{\tau_n^{(1,1)}} = \frac{2\sqrt{2}\alpha_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m L^{5/2} (\varkappa T)^{5/2} |C|^2}{\hbar^6 \varepsilon^2 s_0^2 \pi^{5/2} M N E_G d} \frac{1+4\mu}{(1+\mu)(1+2\mu)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{\tau_n^{(1,2)}} = \frac{4\sqrt{2}\beta_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m V^2 m L^{1/2} (\varkappa T)^{5/2} |C|^2}{\hbar^6 \varepsilon^2 s_0^2 \pi^{5/2} M N \mu E_G d (1+1/\mu) (1+2\mu)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{1+2\mu}{1+1/\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} + \frac{E_V + E_L - 2\zeta_0}{\varkappa T} \right] \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{\tau_n^{(2)}} = \frac{8\alpha_2 |F_1 F_2|^2 e^4 (\varkappa T)^{7/2} m L^4 |C|^4}{\hbar \varepsilon^2 s_0^4 \pi^{1/2} M^2 N^2 / E_G d^2} \left\{ \frac{\mu}{(1+\mu)(1+2\mu)} + \frac{\mu^2}{(1+\mu)^{3/2}(1+2\mu)^2} \right\} \exp \left[ -\frac{2\mu+1}{\mu+1} \frac{E_G}{\varkappa T} \right]$$

$$\mu = m_L/m_V, \quad E_G = E_L - E_V. \quad (3.24)$$

Für den Fall tiefer Temperaturen (3.6) erhält man:

$$\frac{1}{\tau_{n^{(1,1)}}} = \frac{8 \alpha_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L^3 (\varkappa T)^{3/2} |C|^2}{3 \hbar^6 \varepsilon^2 M N s_0 \pi^{5/2} \sqrt{E_G d}} \frac{1 + 5\mu + 11\mu^2/2}{(1+2\mu)^2(1+\mu)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} \right], \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\tau_{n^{(1,2)}}} = \frac{16 \beta_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_V^{5/2} m_L^{1/2} (\varkappa T)^{3/2} |C|^2}{3 \pi^{5/2} \hbar^6 \varepsilon^2 \mu M N s_0 \sqrt{E_G (1+1/\mu)^{3/2} (1+2/\mu)^2 d}} \exp \left[ -\frac{1+2\mu}{1+1/\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} + \frac{E_V + E_L - 2\zeta_0}{\varkappa T} \right], \quad (3.26)$$

$$\frac{1}{\tau_{n^{(2)}}} = \frac{64 \alpha_2 |F_1 F_2|^2 e^4 (\varkappa T)^{3/2} \sqrt{E_G} m_L^5 |C|^4}{9 \pi^{9/2} \hbar^9 \varepsilon^2 M^2 N^2 s_0^2 d^2} \left\{ \frac{\mu^2}{(1+\mu)^2 (1+2\mu)} + \frac{\mu^4}{(1+\mu)^{5/2} (1+2\mu)^3} \right\} \cdot \exp \left[ -\frac{2\mu+1}{\mu+1} \frac{E_G}{\varkappa T} \right]. \quad (3.27)$$

Für die Lebensdauern  $\tau_p^{(1,1)}$ ,  $\tau_p^{(1,2)}$ ,  $\tau_p^{(2)}$  gilt:

$$1/\tau_p^{(j)} = 1/\tau_n^{(j)} \cdot n_0/p_0, \quad (j) = (1,1), (1,2), (2). \quad (3.28)$$

Wir benutzen jetzt die 3. Annahme über  $d$  und ersetzen in (3.15) den anzupassenden Parameter  $P$  durch  $\eta$ :

$$P = \eta (|C|^2 / M N s_0^2). \quad (3.29)$$

Mit (3.15), (3.29) und

$$n_0 = \frac{1}{4} (2 m_L \varkappa T / \hbar^2 \pi)^{3/2} \exp[-(E_L - \zeta_0) / \varkappa T] \quad (3.30)$$

wird

$$d = \eta \frac{|C|^2 \cdot (\varkappa T)^{3/2} m_L^{3/2}}{\sqrt{2} \hbar^3 \pi^{3/2} M N s_0^2} \exp \left[ -\frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right] \quad (3.31)$$

und die Lebensdauer (3.22)–(3.24)

$$\frac{1}{\tau_{n^{(1,1)}}} = \frac{4 \alpha_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L \varkappa T (1+4\mu)}{\eta \pi \hbar^3 \varepsilon^2 E_G (1+\mu) (1+2\mu)^{3/2}} \exp \left[ \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} - \frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} \right], \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{\tau_{n^{(1,2)}}} = \frac{8 \beta_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_V^2 \varkappa T}{\eta \pi m_L \hbar^3 \varepsilon^2 E_G \mu (1+1/\mu) (1+2/\mu)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{1+2\mu}{1+1/\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} + \frac{E_V - \zeta_0}{\varkappa T} + 2 \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right], \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{\tau_{n^{(2)}}} = \frac{16 \alpha_2 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L (\varkappa T)^{1/2}}{\eta^2 \pi^{3/2} \hbar^3 \varepsilon^2 \sqrt{E_G}} \left\{ \frac{\mu}{(1+\mu)(1+2\mu)} + \frac{\mu^2}{(1+\mu)^{3/2}(1+2\mu)^2} \right\} \exp \left[ -\frac{2\mu+1}{\mu+1} \frac{E_G}{\varkappa T} + 2 \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right] \quad (3.34)$$

sowie die Lebensdauer (3.25)–(3.27)

$$\frac{1}{\tau_{n^{(1,1)}}} = \frac{8 \sqrt{2} \alpha_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L^{3/2} s_0}{3 \eta \pi \hbar^3 \varepsilon^2 \sqrt{E_G}} \frac{1+5\mu+11\mu^2/2}{(1+2\mu)^2(1+\mu)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{2\mu+1}{\mu+1} \frac{E_G}{\varkappa T} + 2 \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right], \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{\tau_{n^{(1,2)}}} = \frac{16 \sqrt{2} \beta_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_V^{5/2} s_0}{3 \eta m_L \pi \hbar^3 \varepsilon^2 \sqrt{E_G} \mu (1+1/\mu)^{3/2} (1+2/\mu)^2} \exp \left[ -\frac{2\mu+1}{1/\mu+1} \frac{E_G}{\varkappa T} + \frac{E_V - \zeta_0}{\varkappa T} + 2 \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right], \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{\tau_{n^{(2)}}} = \frac{128 \alpha_2 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L^2 \sqrt{E_G} s_0^2}{9 \eta^2 \pi^{9/2} \hbar^3 \varepsilon^2 (\varkappa T)^{3/2}} \left\{ \frac{\mu^2}{(1+\mu)^2(1+2\mu)} + \frac{\mu^4}{(1+\mu)^{5/2}(1+2\mu)^3} \right\} \exp \left[ -\frac{2\mu+1}{\mu+1} \frac{E_G}{\varkappa T} + 2 \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right]. \quad (3.37)$$

---

man die Annahme über den Zusammenhang von  $d$  und Elektronenkonzentration nicht macht.

Das würde bedeuten, daß die Lebensdauer mit  $T^{-1}$  exponentiell ansteigt. Mit Annahme 3 über  $d$

Es soll am Schluß dieses Kapitels betont werden, daß man im wesentlichen die gleiche Abhängigkeit von Energielücke, Temperatur und effektive Masse erhält, wie bei den reinen Auger-Prozessen, wenn

erhält man bei geeigneter Anpassung ein Kurvenstück, daß mit  $T^{-1}$  exponentiell fällt. Außerdem ergeben sich mit Annahme 3 charakteristische Unterschiede zwischen n- und p-leitendem Material.

So ergibt sich für III-V-Verbindungen bei denen  $\mu \ll 1$  gilt, daß für n-leitendes Material die Lebensdauer mit  $T^{-1}$  nicht fällt, während sie für p-leitendes Material ein Maximum und ein Minimum aufweist. Das soll im folgenden Kapitel an InSb gezeigt werden.

#### 4. Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Für Majoritäts- und Minoritätsladungsträger ergeben sich experimentell unterschiedliche Lebensdauern. Da man annehmen muß, daß für die Majoritätsträger Einfang in Störstellen für die Lebensdauer eine Rolle spielt, sollen die in dieser Arbeit berechneten Lebensdauern nur mit den experimentellen Minoritätsladungsträgerlebensdauern verglichen werden.

In keiner dem Verfasser bekannten Messung von Ladungsträgerlebensdauern (z. B. 6, 7, 8, 9, 10) in Abhängigkeit von der Temperatur ist die Leitungsbandedektronendichte angegeben, die für den Vergleich benötigt wird. In den angegebenen Arbeiten findet man jedoch die Nettodotierung  $N_D - N_A$ , ( $N_D$  = Donatordichte,  $N_A$  = Akzeptordichte). Nach<sup>5</sup> kann man die Ladungsträgerdichte bestimmen, wenn man neben  $N_A$  und  $N_D$  bei n-Leitern die Tiefe der Donatorniveaus, bei p-Leitern die Tiefe der Akzeptorniveaus kennt.

Außerdem müssen alle Donator- bzw. Akzeptorniveaus gleich sein und jeweils nur ein Elektron bzw. Loch binden können.

---


$$\begin{aligned} \tau_n^{-1} &= (\tau_n^{(1,1)})^{-1} + (\tau_n^{(2)})^{-1} \\ &= \exp \left[ -\frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{E_G}{\varkappa T} + \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right] \left\{ \frac{4\alpha_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L \varkappa T (1+4\mu)}{\eta \pi \hbar^3 \varepsilon^2 E_G (1+\mu) (1+2\mu)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16\alpha_2 \pi^{5/2} e^4 |F_1 F_2|^2 m_L (\varkappa T)^{1/2}}{\eta^2 \hbar^3 \varepsilon^2 \sqrt{E_G}} \left[ \frac{\mu}{(1+\mu)(1+2\mu)} + \frac{\mu^2}{(1+\mu)^{3/2}(1+2\mu)^2} \right] \exp \left[ \frac{E_L - \zeta_0}{\varkappa T} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$


---

Der erste Summand in (4.5) repräsentiert die Einphononen-Auger-Prozesse, der zweite Summand die Zweiphononenprozesse. Die Nullphononen-Augenprozesse sind nicht berücksichtigt. Sie sind entscheidend für die Lebensdauern bei Temperaturen über 250 K<sup>6</sup>. Die zugehörige Exponentialfunktion

Im folgenden werden also Donator- bzw. Akzeptortiefe sowie  $N_A$  bzw.  $N_D$  als weitere Anpaßparameter behandelt und auf diese Weise untersucht, ob die vorhandenen experimentellen Angaben mit der hier entwickelten Theorie verträglich sind.

p-leitendes InSb:

Die in den Lebensdauern (3.32)–(3.37) auftretenden Stoffkonstanten sind für InSb:

$$\begin{aligned} E_G^{11a,11b} &= (0.24 - 0.26 T/1000) \text{ [eV]}, \\ \varepsilon^{12} &= 16,8, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$m_L/m_0 = 0,0155, m_V/m_0 = 0,25, \mu = m_L/m_V = 0,062.$$

Eine kurze Abschätzung zeigt, daß wegen der Exponentialfunktion für Temperaturen  $T \leq 250$  K  $1/\tau_n^{(1,2)}$ ,  $1/\tau_p^{(1,1)}$  und  $1/\tau_p^{(1,2)}$  gegen  $1/\tau_n^{(1,1)}$  sowie  $1/\tau_p^{(2)}$  gegen  $1/\tau_n^{(2)}$  vernachlässigbar sind, wenn man voraussetzt, daß der Löcherüberschuß  $\nu_p$  den Elektronenüberschuß  $\nu_n$  nicht allzu stark überwiegt ( $\nu_p < 10^3 \nu_n$ ).

Zur Frage, ob der Fall hoher oder tiefer Temperaturen zutrifft, ist folgendes zu sagen. Bei der in<sup>13</sup> durchgeführten Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten zeigt es sich, daß die beteiligten Phononen im für das Integral wesentlichen Integrationsgebiet Wellenvektoren vom Betrage

$$k_g = (2 m_L E_G / \hbar^2)^{1/2} \quad (4.2)$$

besitzen. Die Energie dieser Phononen ist bei InSb

$$\hbar s_0 k_g \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ erg}. \quad (4.3)$$

Für  $T > 100$  K liegt daher der Fall hoher Temperaturen (3.7) vor. Der Überschuß von Leitungsbandedektronen nimmt also nach dem Gesetz

$$-(\partial \nu_n / \partial t) = (\nu_n / \tau_n) \quad (4.4)$$

ab. Dabei ist

von  $\tau_n^{(0)}$  ist  $\exp[(2\mu+1)/(\mu+1)/E_G/\varkappa T]$  und wächst mit  $T^{-1}$  so stark, daß  $\tau_n^{(0)}$  gegenüber den Summanden von (4.5) für Temperaturen  $T < 250$  K keine Rolle spielt. (4.5) beschreibt daher den mit  $T^{-1}$  fallenden Kurventeil der Lebensdauer. Es wurde schon am Anfang des Kapitels über die

Schwierigkeit gesprochen, die Minoritätsladungsträgerlebensdauer zu bestimmen. Wir benutzen die Formel

$$p_0 = \frac{2(N_A - N_D)}{(1 + (N_D/\beta N_V) \exp\{\varepsilon_A/\kappa T\}) + \sqrt{(1 + (N_D/\beta N_V) \exp\{\varepsilon_A/\kappa T\})^2 + (4/\beta N_V)(N_A - N_D) \exp\{\varepsilon_A/\kappa T\}}} \quad (4.6)$$

aus<sup>5</sup>.  $N_A$  ist die Akzeptordichte,  $N_D$  die Donatordichte der Probe,  $\varepsilon_A$  ist die Tiefe der Akzeptorniveaus.  $\beta$  ist die Störstellenspinentartung (Impurity-Level Spin Degeneracy) der Akzeptoren. Sie ist voraussetzungsgemäß  $\beta = 2$ . Die beiden zusätz-

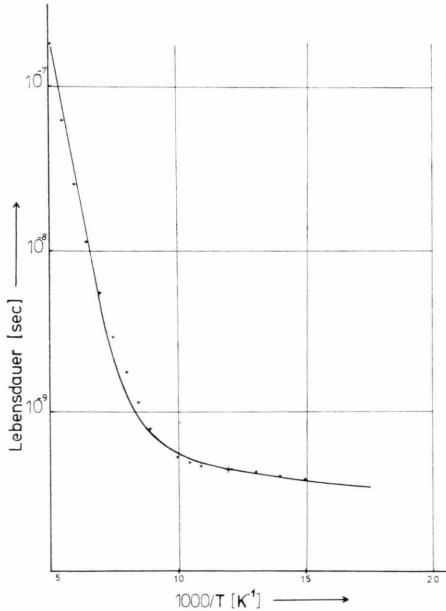


Abb. 16. Lebensdauer in p-leitendem InSb mit der Dotierung  $N_A - N_D = 2,85 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  nach Laff und Fan<sup>15</sup> (ausgezogene Linie), sowie die mit den Parametern aus (4.7) berechnete Lebensdauer (durch Kreuze gekennzeichnet).

#### *n*-leitendes InSb:

Wie am Anfang dieses Kapitels bemerkt, gilt die berechnete Lebensdauer für die Minoritätsladungsträger, jetzt also für die Löcher des Valenzbandes. Das bedeutet, daß in (3.1)  $v_p$  berechnet wird. Nach (3.1):

$$\begin{aligned} -\partial v_p / \partial t &= v_p / \tau_p, \\ (\tau_p)^{-1} &= (\tau_p^{(11)})^{-1} + (\tau_p^{(2)})^{-1} = 2 \sqrt{2} \frac{\alpha_1 e^4 |F_1 F_2|^2 m_L^2 (1 + 4\mu) (\kappa T)^{3/2}}{\eta \hbar^3 \varepsilon^2 s_0 m_V^{3/2} \pi^{3/2} (1 + \mu) (1 + 2\mu)^{3/2} E_G} \\ &\quad \exp \left[ -\frac{1 + 2\mu}{1 + \mu} \frac{E_G}{\kappa T} + \frac{\zeta_0 - E_V}{\kappa T} \right] \quad (4.10) \\ &\quad \frac{8 \alpha_2 m_L^{3/2} |F_1 F_2|^2 e^4 (\kappa T)^{3/2}}{\eta^2 m_V \pi^{3/2} \varepsilon^2 \hbar^3 s_0^2 \sqrt{E_G}} \left\{ \frac{\mu}{(1 + \mu) (1 + 2\mu)} + \frac{\mu^2}{(1 + \mu)^{3/2} (1 + 2\mu)^2} \right\} \exp \left[ -\frac{\mu}{1 + \mu} \frac{E_G}{\kappa T} \right]. \end{aligned}$$

Die zur Anpassung benutzten Parameter sind: Tiefe der Donatoren:  $\varepsilon_D = 0$ , Akzeptorkonzentration:  $N_A = 0$ .

lichen Anpaßparameter, die durch (4.6) herinkommen, sind  $N_D$  und  $\varepsilon_A$ . Abbildung 16 zeigt eine von Laff und Fan gemessene Kurve für p-leitendes InSb mit  $N_A - N_D = 2,85 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , und als Vergleich die mit den Parametern

$$N_D = 0,407 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}, \quad \varepsilon_A = 0,106 \text{ eV}, \quad (4.7)$$

$$(\alpha_1/\eta) |F_1 F_2|^2 = 0,537 \cdot 10^{-2},$$

$$(\alpha_2/\eta^2) |F_1 F_2|^2 = 5,56 \cdot 10^{-3}$$

angepaßte Lebensdauer (4.5). — Wenn wir berücksichtigen, daß

$$1 \leq \alpha_j \leq 3, \quad j = 1, 2$$

gilt, folgt

$$(\alpha_1/\eta)^2 = C (\alpha_2/\eta^2), \quad \frac{1}{3} \leq C \leq 9. \quad (4.8)$$

Damit kann man aus (4.7) die Abschätzung

$$0,024 \leq |F_1 F_2| \leq 0,124 \quad (4.9)$$

gewinnen. Das stimmt überein mit der von Beattie und Landsberg<sup>4</sup> berechneten Größenordnung von  $|F_1 F_2|$ . Sie erhalten aus verschiedenen Abschätzungen  $|F_1 F_2| \approx 0,25$  und  $F_1 F_2 \approx 0,1$ .

Fast für den gesamten Verlauf der Lebensdauerkurve von p-leitendem InSb in Abb. 16 sind die Zweiphonenen-Auger-Prozesse ausschlaggebend. Erst im Übergangsgebiet zu den Nullphononen- gewinnen auch die Einphononen-Auger-Prozesse bei  $T \approx 250 \text{ K}$  einen gewissen Einfluß.

Mit  $\beta = \frac{1}{2}$  kann  $n_0$  gemäß

$$n_0 = \frac{2(N_D - N_A)}{\left(1 + \frac{N_A}{\beta N_L} \exp \frac{\varepsilon_D}{kT}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{N_A}{\beta N_L} \exp \frac{\varepsilon_D}{kT}\right)^2 + 4 \frac{N_D - N_A}{\beta N_L} \exp \frac{\varepsilon_D}{kT}}} \quad (4.11)$$

entsprechend (4.6) berechnet werden.

Abbildung 17 zeigt eine Messung von Wertheim<sup>14</sup>. Die nach (4.10) berechnete Kurve wurde mit

$$|F_1 F_2|^2 (\alpha_1/\eta) = 0,499 \cdot 10^{-1}, \quad |F_1 F_2|^2 (\alpha_2/\eta^2) = 0,104 \cdot 10^{-2} \quad (4.12)$$

angepaßt. Daraus folgt ähnlich wie bei p-leitendem Material

$$0,50 \leq |F_1 F_2| \leq 1. \quad (4.13)$$

Daß  $|F_1 F_2|^2$  bei den Ein- und Zweiphononenprozessen verschieden ist, wird dadurch erklärt, daß diese Größe ein vor das Integral gezogener Mittelwert ist. Die zugehörige Gewichtsfunktion im Integranden ist aber bei Ein- und Zweiphononenprozessen verschieden.

### 5. Schlußbemerkung

Es wurde ein Weg gezeigt, der es erlaubt, strahlungslose Band-Band-Übergänge von Elektronen auf Grund von Wechselwirkungsgliedern des Hamilton-Operators zu verstehen. Dies ist eine Alternative zu Erklärungsversuchen auf Grund der Shockley-Read-Theorie<sup>5</sup>, bei der jedoch die verantwortliche quantenmechanische Wechselwirkung im Dunkeln bleibt. In der neuen Theorie tritt infolge der modifizierten Fröhlichschen Transformation der Parameter  $d$  auf, der durch seine Abhängigkeit von der Elektronendichte wesentlich den Temperaturverlauf der Lebensdauer bestimmt. Die angenommene Proportionalität ist mit den vorhandenen Messungen verträglich.

- <sup>1</sup> A. R. Beattie u. P. T. Landsberg, Proc. Roy. Soc. London A **249**, 16 [1958].
- <sup>2</sup> D. M. Eagles, Proc. Phys. Soc. London **78**, 204 [1961].
- <sup>3</sup> A. Haug, Theoretische Festkörperphysik, Franz Deuticke, Wien.
- <sup>4</sup> a) H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. London A **215**, 291 [1952].  
b) C. G. Kuper, Adv. Phys. **8**, 1 [1959].
- <sup>5</sup> J. S. Blakemore, Semiconductor Statistics, Pergamon Press, Oxford 1962.
- <sup>6</sup> R. N. Zitter, A. J. Strauß u. A. E. Attard, Phys. Rev. **115**, 266 [1959].
- <sup>7</sup> G. K. Wertheim, Phys. Rev. **104**, 662 [1956].
- <sup>8</sup> I. A. Baev, Soviet Physics—Solid State **6**, 217 [1964].

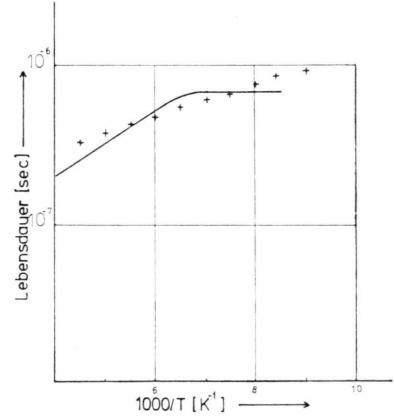


Abb. 17. Von Wertheim<sup>14</sup> gemessene Lebensdauer in n-leitendem InSb mit der Dotierung  $N_D - N_A = 2,3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  (ausgezogene Linie), sowie die mit den Parametern aus (4.11) berechnete Lebensdauer (durch Kreuze gekennzeichnet).

Die charakteristischen Unterschiede der Lebensdauern in p-leitendem und n-leitendem Material, sowie die Ähnlichkeit der Lebensdauerkurven in verschiedenen Stoffen konnten bisher nicht ge deutet werden. Sie werden durch die Theorie der phononenassistierten Auger-Prozesse gut erklärt.

Herrn Prof. Dr. A. Haug danke ich herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. W. Muschik für hilfreiche Diskussionen.

- <sup>9</sup> A. S. Gulyaeva, M. I. Iglitsyn u. L. V. Petrova, Soviet Physics—Solid State **6**, 1217 [1964].
- <sup>10</sup> G. G. Kovalevskaya u. S. V. Slobodchikov, Phys. Stat. Sol. **30**, 441 [1968].
- <sup>11</sup> a) V. Roberts u. J. E. Quarrington, J. Electron. **1**, 152 [1955]. b) R. K. Willardson u. A. C. Berry, Semiconductors and Semimetals **4**, 160 [1968].
- <sup>12</sup> F. Oswald u. R. Schade, Z. Naturforsch. **9a**, 611 [1954].
- <sup>13</sup> W. Rosenthal, Phononenassistierte Augerprozesse zur Deutung strahlungsloser Übergänge in Halbleitern, Dissertation, TU Berlin 1971.
- <sup>14</sup> G. K. Wertheim, Phys. Rev. **104**, 662 [1956].
- <sup>15</sup> R. A. Laff u. H. Y. Fan, Phys. Rev. **121**, 53 [1961].